

استفاده از رویکرد مدل‌سازی و کاربردها در تدریس جبر خطی

ابوالفضل رفیع‌پور

بخش ریاضی، دانشگاه شهید باهنر کرمان
drafiempor@gmail.com
Rafiepour@uk.ac.ir

چکیده. هدف اصلی مقاله حاضر، معرفی رویکرد مدل‌سازی به عنوان یک بدیل مناسب برای ارائه درس‌های ریاضی در سطح دانشگاه است. مثال مورد استفاده در این مقاله از حوزه جبر خطی انتخاب شده است. در این مقاله ضمن مرور مختصری بر برنامه درسی ریاضی، رویکرد مدل‌سازی و کاربردها به همراه چرخه مدل‌سازی و فرآیند ارزیابی حل مسایل مدل‌سازی، معرفی خواهند شد. سپس، نقش فعالیت‌های مستلزم استفاده از مدل ریاضی در ارتقا توانایی حل مسئله دانشجویان برای حل مسایل دنیای واقعی مورد بحث قرار خواهد گرفت و به نمونه‌ای از این نوع فعالیت‌ها دنیای واقعی که مستلزم استفاده از مدل ریاضی مربوط به مباحث جبرخطی است، اشاره خواهد شد. در پایان، برخی از مزیت‌های و معایب استفاده از رویکرد مدل‌سازی در تدریس درس‌های ریاضی دانشگاهی برشمرده می‌شود.

۱. پیش‌گفتار

تا اوایل قرن نوزدهم، ریاضیات جزئی از علوم طبیعی بود و شامل بسیاری از فعالیت‌های کاربردی می‌شد. از اوایل قرن نوزدهم بود که توجهات زیادی به آموزش ریاضی به صورت محض شد. از اواخر قرن نوزدهم، بیشتر برنامه‌های درسی ریاضی بر روی هر دو مؤلفه ریاضی محض و ریاضی کاربردی تأکید کردند. اما در طول قرن بیستم، برنامه درسی ریاضی همواره بین این دو وضعیت - ریاضی کاربردی و ریاضی محض - در حال نوسان بوده است. در طی زمان، گاهی تعادل به نفع آموزش ریاضی به شکل محض بوده و گاهی به نفع آموزش ریاضی کاربردی ریاضی بوده است. این تغییرات پی‌درپی بر اساس تمایلات اجتماعی و تغییرات مختلف در نیازمندی‌های آموزشی و یادگیری دانش‌آموزان/دانشجویان بوده است. به طور مثال در انگلستان، صاحبان صنایع مدعی بودند، که فارغ‌التحصیلان مدرسه/دانشگاه در استفاده از دانش ریاضی خود، در موقعیت‌های دنیای واقعی ناتوان هستند [۲]. اعتراض صنایع در واقع به این دلیل بود که فارغ‌التحصیلان فقط قادر بودند از دانش ریاضی خود برای حل مسایل معمولی و آشنا استفاده نمایند و نمی‌توانستند دانش خود را برای حل مسایل ناآشنا به کار ببرند.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 97M99; Secondary 15A06.

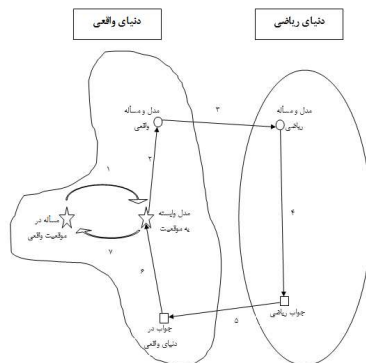
واژگان کلیدی. رویکرد مدل‌سازی، جبر خطی، آموزش ریاضی دانشگاهی، دنیای واقعی.

همین موضوع یعنی توانایی به کارگیری ریاضی در موقعیت های دنیای واقعی، بعدها تبدیل به تمرکز پژوهشی گروهی از پژوهشگران در دنیا گردید. این پژوهشگران در سال ۱۹۸۳ با برگزاری اولین کنفرانس دوسالانه خود «گروه مطالعاتی بین‌المللی برای تدریس مدل‌سازی ریاضی و کاربردها» را پایه گذاری کردند. در حال حاضر ۱۶ دوره از این کنفرانس‌ها برگزار شده است و این گروه یکی از گروه‌های پژوهشی وابسته به کمیسیون بین‌المللی تدریس ریاضی است. موضوعات پژوهشی مورد بحث در گروه مطالعاتی بین‌المللی برای تدریس مدل‌سازی ریاضی و کاربردها، طیف وسیعی از موضوعات ریاضی از دوره ابتدایی تا درس‌های ریاضی دانشگاهی را در بر می‌گیرد. یکی از موضوعاتی که در حوزه پژوهش‌های دانشگاهی بیشتر مورد توجه بوده، استفاده از رویکرد مدل‌سازی و کاربرد برای تدریس جبرخطی است. در مقاله حاضر با معرفی رویکرد مدل‌سازی و کاربردها، مثالی از یک فعالیت دنیای واقعی ارائه می‌شود که مستلزم استفاده از مفاهیم جبرخطی است. در ادامه مزایا و معایب استفاده از این رویکرد معرفی خواهند شد.

۲. رویکرد مدل‌سازی و کاربرد

تعابیر مختلف برای مدل‌سازی و کاربرد از گذشته تاکنون وجود داشته است ولی تعبیری که بیش از همه مورد توافق است، تعبیر فرشافل [۴] است که از سایرین ساده‌تر است و معمولاً برای آموزش افراد مبتدی مورد استفاده قرار می‌گیرد و شامل چهار مرحله است که در آن، فرآیند مدل‌سازی با یک مسئله که در موقعیت دنیای واقعی قرار دارد، شروع می‌شود. سپس از دنیای واقعی به زبان دنیای ریاضی صورت‌بندی می‌گردد تا یک مدل ریاضی به وجود آید. آن‌گاه این مسئله در دنیای ریاضی، حل می‌شود و بعد، جواب مسئله از دنیای ریاضی به زبان دنیای واقعی ترجمه و تفسیر می‌شود و در نهایت، جواب مطرح شده در دنیای واقعی، در مقابل موقعیت اصلی که مسئله در آن طرح شده، مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

اما در تعبیر پیچیده‌تری از فرآیند مدل‌سازی [۱] فرآیند مدل‌سازی با یک مسئله واقعی آغاز می‌شود و موقعیت واقعی در تکلیف یا فعالیت مدل‌سازی ارائه می‌گردد. اولین گام شامل «ساختن یک تصویر ذهنی» (گام ۱ در چرخه شکل ۱) از موقعیت است که الزاماً برای دانش‌آموزان بدیهی نیست. نتیجه این مرحله دست یافتن به مدل «موقعیت-مدار» یا مدل «وابسته به موقعیت» است. سپس این مدل ساده‌تر می‌شود و شرایط به طور ایده آل فرض می‌شوند - مثلاً در نظر گرفتن زمین به عنوان یک کره- و کلیه مفروضات دوباره ساختار بندی می‌شوند (گام ۲ در چرخه شکل ۱) تا «مدل واقعی» به دست آید. در ادامه، این مدل واقعی طی فرآیند صورت‌بندی (گام ۳ در چرخه شکل ۱) تبدیل به یک «مدل ریاضی» می‌شود و در دنیای ریاضی، با استفاده از روش‌های حل مسئله (گام ۴ در چرخه شکل ۱)، یک جواب ریاضی وار برای مسئله ارائه می‌شود. بالاخره، در گام بعدی جواب به دست آمده در دنیای ریاضی در دنیای واقعی تفسیر می‌شود (گام ۵ در چرخه شکل ۱) و در گام بعدی، جواب به دست آمده در دنیای واقعی با مدل موقعیت‌مدار اعتبار بخشی می‌گردد (گام ۶ در چرخه شکل ۱). در نهایت، جواب به دست آمده در دنیای واقعی، با موقعیت اصلی مسئله مقابله می‌شود (گام ۷ در چرخه شکل ۱) تا معنادار بودن پاسخ به دست آمده مورد بررسی قرار گیرد.



شکل ۱: هفت گام فرآیند مدل‌سازی در قالب یک چرخه [۱]

برای ارزیابی عملکرد دانشجویان در حل تکالیف مدل‌سازی، از روش‌های مختلفی استفاده می‌شود. این روش‌ها متناظر با یک یا چند جزء از فرآیند مدل‌سازی است که در چرخه شکل شماره ۱ آمده است و معمولاً وزن اختصاص یافته به هر قسمت متفاوت هستند.

۳. فعالیت‌های مستلزم استفاده از مدل ریاضی (جبرخطی)

در پژوهش‌هایی که از رویکرد مدل‌سازی و کاربردها در آموزش ریاضی استفاده می‌کنند، از فعالیت‌های مختلفی استفاده می‌شود. یک نوع از این فعالیت‌ها، «تکالیف مدل‌سازی مستلزم استفاده از مدل ریاضی»، است که در آن دانشجویان برای خلق کردن و ارزیابی مدل‌های ریاضی تشویق می‌شوند. معمولاً این گونه از تکالیف به صورت مسایل باز- پاسخ طراحی می‌شوند به گونه‌ای که دانشجویان را برای ساختن مدل‌های ریاضی در راستای حل مسایل پیچیده دنیای واقعی به چالش بکشند.

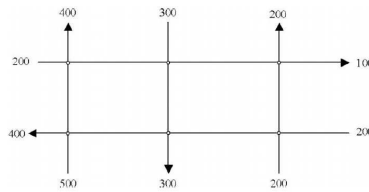
نمونه‌ای از این گونه مسایل که در آن از یک مدل مبتنی بر مفاهیم جبر خطی برای حل مسئله استفاده می‌شود، در شکل ۲ آمده است. این مسئله در [۳] مورد استفاده قرار گرفته است. آنها در مقاله خود، عملکرد چهار گروه از دانشجویان رشته‌های مختلف دانشگاهی در حل یک مسئله دنیای واقعی که درباره جریان عبور و مرور وسایل نقلیه در یک منطقه پر رفت آمد شهر است، گزارش کرده‌اند.

شکل ذیل طرح دو خیابان پر رفت و آمد در یک محدوده تجاری شهر را نشان می‌دهد. مرکز کنترل ترافیک شهر حسگرهایی را برای شمارش اتومبیل‌های عبوری از یک نقطه مشخص، در جاهای مختلف نصب کرده است. بردارها جهت خیابان را نشان می‌دهند. تعداد اتومبیل‌های عبوری نیز در شکل آمده است. در هر تقاطع یک میدان وجود دارد. در ضمن اتومبیل‌ها حق پارک کردن در کنار خیابان را ندارند. با اینکه در شرایط عادی عبور و مرور در این دو خیابان با حالت عادی جریان دارد، ولی مرکز کنترل ترافیک علاقمند است امکان‌های موجود را برای تغییر برخی از مسیرها (مثلاً بستن یک یا چند خیابان) بررسی نماید.

با توجه به توضیحات ارائه شده در بالا، به سوالات ذیل پاسخ دهید.

- آیا می‌توان یکی از راه‌هایی که بین دو میدان هستند را به طور موقت بست؟ اگر بله کدام راه را می‌توان بست و کدام را نمی‌توان؟

- مرکز کنترل ترافیک قصد دارد با نصب برخی علائم در ابتدای هر جاده مسیر عبور و مرور اتومبیل‌ها را با بستن برخی از جاده‌ها تغییر دهد. چه تعداد از این علائم مورد نیاز است؟ آیا روشی برای انتخاب این علائم جاده‌ای وجود دارد، که ارزیابی جریان عبور و مرور را ساده‌تر کند؟
- آیا مدلی که ارائه کرده‌اید با محدودیت عبور حداکثر ۲۰۰ خودرو در هر ساعت در هر خیابان، سازگار است؟ اگر نیست، شما چگونه مدل قبلی خودتان را جرح و تعدیل می‌کنید تا این محدودیت جدید را در نظر بگیرید.



شکل ۲: طرح خیابان‌ها

۴. سخن پایانی (مزایا و معایب این روش)

استفاده از رویکرد مدل‌سازی و کاربرد برای تدریس مفاهیم ریاضی در کلاس‌های درسی ریاضی دانشگاهی، همانند سایر رویکردها دارای مزایا و معایب خاص خود می‌باشد. یک از جدی‌ترین محدودیت‌های استفاده از این روش وقت‌گیر بودن آن است. به عنوان مثال در [۳] که در آن از فعالیت مطرح شده در شکل ۲ استفاده گردید، مستلزم ۷ جلسه دو ساعته از کلاس درس بود. اما در کنار این محدودیت که در نگاه نخست، تأمل برانگیز است، برخی مزایا را می‌توان برای استفاده از رویکرد مدل‌سازی و کاربرد برای تدریس مفاهیم ریاضی در کلاس‌های درسی ریاضی دانشگاهی برشمرد. با استفاده از این روش ریاضی برای دانشجویان (به خصوص برای دانشجویانی که رشته تحصیلی‌شان ریاضی نیست) معنادارتر می‌شود و همین باعث می‌شود که درک بهتری از نقش ریاضی در پدیده‌های دنیای واقعی داشته باشند. پژوهش‌های متعددی نشان داده‌اند که استفاده از این رویکرد باعث بهبود عملکرد دانشجویان در حل مسایل دنیای واقعی خواهد شد.

مراجع

1. Borromeo Ferri, R. : *Theoretical and empirical differentiations of Phases in the modeling process. Zentralblatt fur Didaktik Mathematik*, **38** (2), 86 – 95 (2006).
2. Pollak, H.: *Mathematical modeling – A conversation with Henry Pollak. In Blum, W., Galbraith, P., Henn, H.W. and Niss, M. (Eds.): Modelling and applications in mathematics education. the 14th ICMI study SIAM Rev., Springer, New York (2007).*
3. Possani, E., Trigueros, M., Preciado, J.G., Lozano, M.D.: *Fast verification for all eigenpairs in symmetric positive definite generalized eigenvalue problems. Linear Algebra Appl.*, **432**, 2125 – 2140 (2010).
4. Verschaffel, L. : *Taking the modeling perspective seriously at the elementary school level: promises and pitfalls (plenary lecture), In Cockburn, A.D., Nardi, E. (Eds.): Proceeding of the 26th Conference of the international group for the psychology of mathematics education*, **1**, 64 – 80 (2002).